7．　応答解析概論

本章では，風応答解析に用いる代表的な解析手法と，その概要について述べる。

7．1 実固有値解析（非減衰自由振動解析）

構造物の持つ固有な振動特性を把握するための解析である。

多自由度系モデルの非減衰自由振動の運動方程式は次のようになる。

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad \cdots\cdots (7.1.1)$$

ただし，　M：構造全体の質量マトリックス

K：構造全体の剛性マトリックス

u：変位ベクトル

$\ddot{u}$：加速度ベクトル

自由振動は調和振動であるから，変位 u を次のように仮定する。

$$u = xe^{i\omega t} \quad \cdots\cdots (7.1.2)$$

ただし，　x：振動モード

ω：円振動数

式(7. 1. 2)を式(7. 1. 1)に代入する。

$$\left(-\omega^2 M + K\right)xe^{i\omega t} = 0 \quad \cdots\cdots (7.1.3)$$

$e^{i\omega t} \neq 0$ であるから式(7. 1 . 3)は次のようになる。

$$\left(-\omega^2 M + K\right)x = 0 \quad \cdots\cdots (7.1.4)$$

x=0 でない解が存在するためには，次の関係が成立しなければならない。

$$\left|\lambda M + K\right| = 0 \quad \cdots\cdots (7.1.5)$$

$$\lambda = -\omega^2$$

これを特性方程式と呼ぶ。この行列式を展開すれば λ に関する n 次の代数方程式になり，その根 λ を固有値という。すなわち λ を固有値，x を固有ベクトル

とする固有値問題になる。

式(7. 1. 4)は同時方程式であるから，ω^2 で割って次のように表す。

$$Mx = \lambda Kx \quad \text{.......(7. 1. 6)}$$

ただし，　$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{.......(7. 1. 7)}$$

これは，$Mx = \lambda Kx$ タイプの一般化固有値問題である。これを標準固有値問題へ変換する。今，K を正定値(positive definite)とする。K を三角分解して次のように表す。

$$K = U^t U \quad \text{.......(7. 1. 8)}$$

ここで，U は上半分の三角マトリックスを表す。

式(7. 1. 8)を式(7. 1. 6)に代入，さらに左から U^{-t} を掛ける。

$$U^{-t} M U^{-1} U x = \lambda U x \quad \text{.......(7. 1. 9)}$$

これは次のような標準固有値問題となる。

$$A\upsilon = \lambda \upsilon \quad \text{.......(7. 1. 10)}$$

ただし，　$A = U^{-t} M U^{-1}$
$\upsilon = Ux$

この固有値問題を固有値解法(例えばサブスペース法)によって解き，固有値 λ，固有ベクトル υ を求める。

固有円振動数	$\omega_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$	(rad /sec)
固有振動数	$f_i = \dfrac{\omega_i}{2\pi}$	(Hz)
固有周期	$T_i = \dfrac{1}{f_i}$	(sec)
固有モード	$x_i = U^{-1} v_i$	
刺激係数	$\beta_{di} = \dfrac{x_i^t M I_d}{x_i^t M x_i}$	
有効質量	$m_{di} = \dfrac{\left(x_i^t M I_d\right)^2}{x_i^t M x_i}$	$i=1 \sim n$ $d=1 \sim 6$（自由度）

7．2 減衰自由振動解析（複素固有値解析）

多自由度系の減衰自由振動の運動方程式は次のように表される。

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0 \qquad (7.2.1)$$

ただし，　　　C：構造全体の減衰マトリックス

今，減衰マトリックス C を非比例減衰とする。前節と同様に，式(7. 2. 1)を標準固有値問題へと導く。

解 u を次のように仮定する。

$$u=xe^{\lambda t} \qquad \lambda=\mu+i\omega \qquad (7.2.2)$$

これを式(7. 2. 1)に代入する。

$$\left(\lambda^2 M+\lambda C+K\right)xe^{\lambda t}=0 \qquad (7.2.3)$$

$e^{\lambda t}\neq 0$，また $x=0$ でない解が存在するためには次の式が成立しなければならない。

$$\left|\lambda^2 M+\lambda C+K\right|=0 \qquad (7.2.4)$$

これが減衰のある場合の特性方程式である。今，M, C, K が実マトリックスであるから，式(7. 2. 4)は λ に関する $2n$ 次の実係数代数方程式になる。

今，標準形へ導くために式(7. 2. 1)に加えて式(7. 2. 6)の恒等式を導入する。

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+Ku=0 \qquad (7.2.5)$$

$$I\dot{u}-I\dot{u}=0 \qquad (7.2.6)$$

両式を連成させると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

また，$\dot{u},\ddot{u}$ については次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \dot{u}&=\lambda xe^{\lambda t}=\lambda u \\ \ddot{u}&=\lambda^2 xe^{\lambda t}=\lambda\dot{u} \end{aligned} \qquad (7.2.8)$$

これを式(7. 2. 7)に代入する。

$$\lambda\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(7.2.9)$$

今，M が正定値とすれば次の式が成り立つ。

$$-\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(7.2.10)$$

これを書きなおして次のように表す。

$$\begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(7.2.11)$$

すなわち，次のような標準固有値問題となる。

$$A\upsilon=\lambda\upsilon \quad \cdots\cdots(7.2.12)$$

ただし，

$$A=\begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \upsilon=\begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(7.2.13)$$

式(7. 2 12)には $2n$ 個の固有値，$2n$ 個の固有ベクトルがあるが，それら固有ベクトルすべてが n 次空間の中で直交するとはかぎらない。しかし，比例減衰ならば固有ベクトル直交する。

式(7. 2. 11)より得られた固有値 λ は複素数(実部 λ_R ,虚部 λ_I)となる。固有振動数とモード減衰定数と固有値との関係は次のように表される。

$$\text{減衰固有振動数：} f=\frac{1}{2\pi}\lambda_I$$

$$\text{モード減衰定数：} h=\frac{\lambda_R}{\sqrt{\lambda_R^2+\lambda_I^2}} \quad \cdots\cdots(7.2.14)$$

７．３　ガスト応答解析[1～2]

風は時間的，空間的に変動する。この不規則な乱れにより生じる構造物の不規則応答をガスト応答という。

1 自由度系（主流方向の応答変位を x）の運動方程式は次式で示される。

$$m\ddot{x}+c_0\dot{x}+kx=p(\dot{x})+p(t) \quad \cdots\cdots (7.3.1)$$

ここで，　m, c_o, k　：質量，構造減衰，剛性

$p(\dot{x})$　：振動応答に伴う非定常抗力（空気力減衰）

$p(t)$　：風速に伴う変動抗力

応答のパワースペクトル $S_x(f)$ は，次式で得られる。

$$S_x(f)=\frac{|H(f)|^2}{k^2}S_p(f) \quad \cdots\cdots (7.3.2)$$

$$S_p(f)=4p^2|X_D(f)|^2\frac{S_u(f)}{U^2},\quad p=\frac{\rho}{2}C_DAU^2 \quad \cdots\cdots (7.3.3)$$

したがって変動風速 x は次式で得られる。

$$\frac{\bar{x}^2}{2}=4\frac{p^2}{U^2}\frac{1}{k^2}\int_0^\infty|X_D(f)|^2|H(f)|^2S_u(f)df \quad \cdots\cdots (7.3.4)$$

ここで，　$|X_D(f)|^2, |F(f)|$　：空力アドミタンス，メカニカルアドミタンス

$|H(f)|^2$　：系の伝達関数

$S_p(f)$　：変動抗力のパワースペクトル

$S_u(f)$　：変動風速のパワースペクトル

C_D, A, U, ρ　：抗力係数，受風面積，平均風速，空気密度

バフェティングは航空工学の主翼の後流中に入った尾翼の振動問題であり，基本的にガスト応答と同様な現象である。

７．４　渦励振応答解析[1～2]

渦励振は物体から放出される渦の作用により生じる振動（破壊までには至らない）である。ここでは，橋桁の渦励振を例とした場合を示す。

渦励振の最大応答振幅は，励振力が求められれば解析的に求まる。実橋断面を考えた場合は以下の様に求まる。

渦励振力は空気力の非線形性を無視すると次式で得られる。

$$F=\frac{1}{2}\rho U_m^2 BC_h\left(\frac{\dot{y}}{U_m}\right) \quad \cdots\cdots (7.4.1)$$

ここで，　ρ, U_m, B, D　：空気密度，最大振幅発現風速，幅員，桁高

$C_h, \dot{y}$　：自励空気圧力係数，振動速度

1 自由度系の運動方程式は次式で表される。

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=F,\ y=Y\sin\omega t \quad \cdots\cdots (7.4.2)$$

見かけの減衰係数を 0 とする条件のもとでの応答 Y は次式で得られる。

$$Y=\frac{\rho U_m B^2 C}{4m\delta f} \quad \cdots\cdots (7.4.3)$$

$$C=\frac{4m\delta}{\rho D^2}\frac{Y}{B}\frac{D}{B}\frac{1}{U_{mr}},\ U_{mr}=\frac{U_m}{fD},\ f=\frac{\omega}{2\pi} \quad \cdots\cdots (7.4.4)$$

ここで，　δ：　構造対数減衰率

応答実験結果より次式が得られている。

$$C=0.625\left(\frac{D}{B}\right)^2 \quad \cdots\cdots (7.4.5)$$

$$Y=\frac{0.625\rho D^2 U_m}{4m\delta f} \quad \cdots\cdots (7.4.6)$$

7．5 フラッター解析

吊橋は，その長大化にともない固有振動数の低下が顕著になり，連成フラッターがその設計風速内で問題となってくる。長大吊橋の全橋模型風洞試験等によるフラッターの発生挙動の観測から，フラッターモードは予想以上に複雑であることがわかり，従来型の捩じれと曲げの類似基本振動モードの重ね合せによる方法では十分とは言えない場合もある。そこで，三次元立体骨組モデルを用い，非定常空気力を作用させた運動方程式の複素固有値解析による，より正確なフラッター解析が必要となってくる。

多自由度系の運動方程式に非定常空気力を考慮した平衡方程式は次式で示される。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{P\} \quad \cdots\cdots (7.5.1)$$

ここに，$[M],[C],[K]$ ：質量，減衰，剛性マトリックス

$\{\ddot{u}\},\{\dot{u}\},\{u\}$ ：加速度，速度，変位ベクトル

$\{P\}$ ：非定常空気力

長大橋梁の桁に作用する非定常空気力は，桁の橋軸直角水平方向への可撓性を考慮するために，2次元の翼理論を拡張した形で表現される。

・2次元翼理論

$$L=\pi\rho b^2\omega^2\left(L_{yR}\cdot y+L_{yI}\cdot\frac{\dot{y}}{\omega}+L_{\theta R}\cdot\theta+L_{\theta I}\cdot\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right) \quad \cdots\cdots (7.5.2)$$

$$M=\pi\rho b^4\omega^2\left(M_{yR}\cdot y+M_{yI}\cdot\frac{\dot{y}}{\omega}+M_{\theta R}\cdot\theta+M_{\theta I}\cdot\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right) \quad \cdots\cdots (7.5.3)$$

・3次元拡張

$$L=\pi\rho b^2\omega^2\left(L_{yR}\cdot y+L_{yI}\cdot\frac{\dot{y}}{\omega}+L_{zR}\cdot z+L_{zI}\cdot\frac{\dot{z}}{\omega}+L_{\theta R}\cdot\theta+L_{\theta I}\cdot\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right) \quad \cdots\cdots (7.5.4)$$

$$M=\pi\rho b^4\omega^2\left(M_{yR}\cdot y+M_{yI}\cdot\frac{\dot{y}}{\omega}+M_{zR}\cdot z+M_{zI}\cdot\frac{\dot{z}}{\omega}+M_{\theta R}\cdot\theta+M_{\theta I}\cdot\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)\text{.. (7. 5. 5)}$$

$$D=\pi\rho b^2\omega^2\left(D_{yR}\cdot y+D_{yI}\cdot\frac{\dot{y}}{\omega}+D_{zR}\cdot z+D_{zI}\cdot\frac{\dot{z}}{\omega}+M_{\theta R}\cdot\theta+M_{\theta I}\cdot\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)\text{.........(7. 5. 6)}$$

ここに，L ： 非定常揚力

M ： 空力モーメント

D ： 非定常抗力

ρ ： 空気密度

b ： 代表長（桁半幅）

U ： 風速

ω ： 円振動数

$L_{yR},L_{yI},L_{zR},L_{zI},L_{\theta R},L_{\theta I},M_{yR},M_{yI},M_{zR},M_{zI},M_{\theta R},M_{\theta I},$

$D_{yR},D_{yI},D_{zR},D_{zI},D_{\theta R},D_{\theta I}$ ：非定常空気力係数

非定常空気力係数は換算（円）振動数$\left(k=\frac{\omega b}{U}\right)$の関数である。

各係数の添字は，y,θ,z が鉛直たわみ，ねじれ，水平たわみの各振動方向成分を，R,I が実数部，虚数部を表わす。

また，Scanlan は同様に，2 次元から 3 次元へ空気力係数を拡張し，次のように無次元化している。

$$L_{ae}=\frac{1}{2}\rho U^2B\left[KH_1^*\frac{\dot{h}}{U}+KH_2^*\frac{B\dot{\alpha}}{U}+K^2H_3^*\alpha+K^2H_4^*\frac{h}{B}+KH_5^*\frac{\dot{p}}{U}+K^2H_6^*\frac{p}{B}\right]\text{.......(7. 5. 7)}$$

$$M_{ae}=\frac{1}{2}\rho U^2B^2\left[KA_1^*\frac{\dot{h}}{U}+KA_2^*\frac{B\dot{\alpha}}{U}+K^2A_3^*\alpha+K^2A_4^*\frac{h}{B}+KA_5^*\frac{\dot{p}}{U}+K^2A_6^*\frac{p}{B}\right]\text{.........(7. 5. 8)}$$

$$D_{ae}=\frac{1}{2}\rho U^2B\left[KP_1^*\frac{\dot{p}}{U}+KP_2^*\frac{B\dot{\alpha}}{U}+K^2P_3^*\alpha+K^2P_4^*\frac{p}{B}+KP_5^*\frac{\dot{h}}{U}+K^2P_6^*\frac{h}{B}\right] \quad \text{............}(7.5.9)$$

ここに，$K\left(=\frac{B\omega}{U}\right)$：換算（円）振動数，$U$：平均風速，$B$：代表長（=2b），

h：鉛直変位，p：水平変位，α：ねじれ変位，$H_i^*, P_i^*, A_i^*, (i=1-6)$；非定常空気力係数である。

桁以外の部位については，準定常の仮定を用いると以下のように表される。

・ケーブル

$$L=\rho\cdot d_c\cdot C_L\cdot U\cdot\dot{y} \quad \text{............}(7.5.10)$$

$$D=\rho\cdot d_c\cdot C_D\cdot U\cdot\dot{z} \quad \text{............}(7.5.11)$$

・主塔，ハンガー

$$D=\rho\cdot d_t\cdot C_D\cdot U\cdot\dot{z} \quad \text{............}(7.5.12)$$

$$D=\rho\cdot d_h\cdot C_D\cdot U\cdot\dot{z} \quad \text{............}(7.5.13)$$

ここに　C_D ： 抗力係数

C_L ： 揚力係数

d_c ： ケーブル直径

d_t ： 塔投影幅

d_h ： ハンガー直径

非定常空気力を速度項，変位項で各々整理し，マトリックス表示すると次式となる。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=[A]\{\dot{u}\}+[B]\{u\} \quad \text{............}(7.5.14)$$

(7.5 .14)式の右辺を左辺に移す。

$$[M]\{\ddot{u}\}+([C]-[A])\{\dot{u}\}+([K]-[B])\{u\}=0 \quad \text{............}(7.5.15)$$

ここで次式を定義する。

$$M^* = [M]$$
$$C^* = [C] - [A] \quad \cdots\cdots (7.5.16)$$
$$K^* = [K] - [B]$$

次式が得られる。

$$M^*\{\ddot{u}\} + C^*\{\dot{u}\} + K^*\{u\} = 0 \quad \cdots\cdots (7.5.17)$$

式（7. 5. 17）を標準固有値問題へ導く。標準固有値問に導く際に，式(7. 5. 17)を直接しようする方法が直接法であり，一度モード座標系に変換する方法がモード法である。

直接法の場合は，以下のようになる。

$$\{u\}(t) = \{\phi\}e^{\lambda t} \qquad ただし，\lambda = \lambda_R + i\lambda_I \quad \cdots\cdots (7.5.18)$$

とする。

標準固有値問題は次式で表される。

$$Av = \lambda v \quad \cdots\cdots (7.5.19)$$

$$ここに，A = \begin{bmatrix} -M^{*-1}C^* & -M^{*-1}K^* \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (7.5.20)$$

$$v = \begin{Bmatrix} \lambda\{\phi\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (7.5.21)$$

式(7. 5. 19)の固有方程式を解くと，共役な複素固有値$\lambda(\lambda_R + i\lambda_I)$と複素固有ベクトル$v$が求められる。

固有値と減衰固有円振動数(ω)，減衰定数(h)，対数減衰率(δ)の関係は次式で示される。

$$\omega = \lambda_I \quad \cdots\cdots (7.5.22)$$

$$h = \frac{\lambda_R}{\sqrt{\lambda_R{}^2 + \lambda_I{}^2}} \quad \cdots\cdots (7.5.23)$$

$$\delta = 2\pi h \quad \cdots\cdots (7.5.24)$$

従ってフラッター発現風速は$\lambda_R = 0$となる風速であり，そのときのλ_Iによりフラッター発現時の円振動数ω_Fが求められる。

＜参考文献＞

[1] (社) 日本鋼構造協会：構造物の耐風工学　東京電気大学出版　1997

[2] 岡内，伊藤 ，宮田　：耐風構造　丸善　1977